第11卷 第2期 西南石油学院学报 Vol.11 No.2
1989年5月 JOURNAL OF SOUTHWSETERN PETROLEUM INSTITUTE May. 1989

正交各向异性圆柱层壳的自振分析

姚安林 肖芳淳

（石油机械系）

摘要 本文根据控制壳体自由弯曲振动的Von Kármán动力方程，采用加权余量法得出了一种分析正交各向异性圆柱层壳自由振动的新方法。结果与Werner Soedal的结论吻合良好。文中将该方法用于数值计算，并通过比较三种管子的自振频率验证了方法的有效性。

关键词 正交各向异性体；圆柱层壳；自由振动；加权余量法

前 言

确定正交各向异性圆柱层壳的自振频率是一个重要的工程问题。这个问题曾由Werner Soedal作过研究，结论可从文献〔1〕见到。

本文在控制壳体自由弯曲振动的Von Kármán动力方程的基础上，采用加权余量法，得出一种分析正交各向异性圆柱层壳自由振动的新方法——加权余量法，从而使该问题的分析过程得到了简化。所得结论与Werner Soedal方法的结论一致，而且这种方法更为简便。

1 理论分析

考察一个两端简支的正交各向异性的闭口断面圆柱层壳。我们假定，即使壳体是由n层层壳组成仍属薄壳。同时，我们还假设位移沿壳的厚度方向是线性变化的。壳体的厚度为h，长度为l，半径为a。一般说来同平面的相互影响和转动惯性的影响可略而不计。可导出控制壳体自由弯曲振动的冯·卡尔曼动力方程形式如下〔1〕

$$D_{11}W_{,xxxx}+2(D_{12}+D_{33})\frac{1}{a^2}W_{,xx,\theta\theta}+\frac{D_{22}}{a^4}W_{,\theta\theta\theta\theta}+\rho hW_{,tt}=q_2-\frac{1}{a}\varphi_{,xx} \quad (1)$$

本文1988年10月27日收到

$$\frac{A_{12}^2-A_{11}A_{22}}{a}W_{,xx}+A_{11}\varphi_{,xxxx}+\frac{A_{22}}{a^4}\varphi_{,\theta\theta\theta\theta}+$$

$$+\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2-2A_{12}A_{33}}{A_{33}a^2}\varphi_{,xx,\theta\theta}=0 \tag{2}$$

其中脚标表示其前面变量对相应坐标求导，t是时间，ρ是圆柱层壳单位体积 的质量，W是壳的弯曲变形，φ 是应力函数，而 A_{ij} 和 D_{ij}分别是拉伸刚度〔A〕和弯曲刚度〔D〕的元素，可写作

$$A_{ij}=\sum_{k=1}^{n}(\overline{Q}_{ij})_k(h_{k+1}-h_k) \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3) \tag{3}$$

$$D_{ij}=\sum_{k=1}^{n}(\overline{Q}_{ij})_k\left(h_{k-1}^3-h_k^3\right)\Big/3 \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3) \tag{4}$$

这里的脚标k表示层壳的第k层，h_k是层壳的第k层相对参考平面的中心距离，而$(\overline{Q}_{ij})_k$表示第k层在各个坐标方向的刚度．它是状态变量（即应力、应变等）的函数，但与应力-应变 的过程无关。在加载或逐渐破坏过程中的刚度值$(\overline{Q}_{ij})_k$可如文献〔1，2〕所述那样来确定。

壳的边界条件是：

$$W(0,\ \theta,\ t)=W(l,\ \theta,\ t)=0 \tag{5}$$

$$M_{xx}(0,\ \theta,\ t)=M_{xx}(l,\ \theta,\ t)=0 \tag{6}$$

令

$$W(x,\ \theta,\ t)=W(x,\ \theta)e^{i\omega t} \tag{7}$$

$$\varphi(x,\ \theta,\ t)=\varphi(x,\ \theta)e^{i\omega t} \tag{8}$$

即可满足这些边界条件。

欲求本征值，我们让$q_2=0$，于是方程(1)和(2)变成

$$D_{11}W_{,xxxx}(x,\ \theta)+2(D_{12}+D_{33})\frac{1}{a^2}W_{,xx,\theta\theta}(x,\ \theta)+$$

$$+\frac{D_{22}}{a^2}W_{,\theta\theta\theta\theta}(x,\ \theta)-\rho h\omega^2W_{,tt}(x,\ \theta)-\frac{1}{a}\varphi_{,xx}(x,\ \theta)=0 \tag{9}$$

$$\frac{A_{12}^2-A_{11}A_{22}}{a}W_{,xx}(x,\ \theta)+A_{11}\varphi_{,xxxx}(x,\ \theta)-\frac{A_{22}}{a^4}\varphi_{,\theta\theta\theta\theta}(x,\ \theta)+$$

$$+\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2-2A_{12}A_{33}}{A_{33}a^2}\varphi_{,xx,\theta\theta}(x,\ \theta)=0 \tag{10}$$

壳的边界条件变成

$$W(0,\ \theta)=W(l,\ \theta)=0 \tag{11}$$

$$M_{xx}(0,\ \theta)=M_{xx}(l,\ \theta)=0 \tag{12}$$

为求解正交各向异性圆柱层壳的自振频率，采用权余法。现作如下说明：

控制方程和边界条件是[3, 4]

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{L}_{ij}(W)-f_i=0,\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\ (W\in V) \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^{n} G_{rj}(W)-g_r=0,\ (r=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\ (W\in S) \tag{14}$$

这里W是正交各向异性圆柱层壳的弯曲变形，或未知函数，L_{ij}和G_{rj}是微分算子，f_i和g_r是已知函数。

令试函数为

$$W^*(x,\ \theta)=C_W\sin\frac{m\pi x}{l}\cos n(\theta-\psi) \tag{15}$$

$$\varphi^*(x,\ \theta)=C_\varphi\sin\frac{m\pi x}{l}\cos n(\theta-\psi) \tag{16}$$

这里C_W和C_φ是系数，并且都能满足方程(11)和(12)，或方程(14)。因此，将方程(15)和(16)代入方程(9)和(10)或方程(13)便得到内部余量R_{Ii}，即

$$R_{Ii}=\sum_{j=1}^{n} \mathrm{L}_{ij}(W^*)-f_i\neq 0,\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{17}$$

为了消除内部余量R_{Ii}，我们引入内部权函数W_{ki}，即

$$W_{kiW}=W_{ki\varphi}=\sin\frac{m\pi x}{l}\cos(\theta-\psi) \tag{18}$$

于是得到下面的余量方程

$$\int_V R_{Ii}W_{ki}dV=0,\ (i=1,\ 2,\ \cdots n) \tag{19}$$

或

$$\int_V\left\{\left[D_{11}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4+2(D_{12}+D_{33})\left(\frac{n}{a}\right)^2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2+D_{22}\left(\frac{n}{a}\right)^4-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\rho h\omega^2\right]C_W-\frac{1}{a}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2C_\varphi\right\}\sin^2\frac{m\pi x}{l}\cos^2 n(\theta-\psi)dV=0 \tag{20}$$

$$\int_V\left(A_{11}A_{22}-A_{12}^2\right)\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2C_w/a+\left[A_{11}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4+A_{22}\left(\frac{n}{a}\right)^4+\right.$$

$$\left.+\left(A_{11}A_{22}-A_{12}^2-2A_{12}A_{33}\right)\left(\frac{n}{a}\right)^2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\Big/A_{33}\right]C_\varphi\Big\}\cdot$$

$$\cdot\sin^2\frac{m\pi x}{l}\cdot\cos^2 n(\theta-\psi)dV=0 \tag{21}$$

由于$C_w\neq 0$，$C_\varphi\neq 0$，$\sin\frac{m\pi x}{l}\neq 0$，$\cos n(\theta-\psi)\neq 0$，于是可得

$$\left[D_{11}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2+2(D_{12}+D_{33})\left(\frac{n}{a}\right)^2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2+D_{22}\left(\frac{n}{a}\right)^4-\rho h\omega^2\right]\cdot$$

$$\cdot C_W-\frac{1}{a}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 C_\varphi=0 \tag{22}$$

$$\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}{a}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 C_W+\left[A_{11}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4+A_{22}\left(\frac{n}{a}\right)^4+\right.$$

$$\left.+\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2-2A_{12}A_{33}}{A_{33}}\left(\frac{n}{a}\right)^2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right]C_\varphi=0 \tag{23}$$

为使这两个方程在意义上能完全满足，故判别式必须等于零。从而给出受横向弯曲变形分量控制的正交各向异性圆柱层壳模式的自振频率计算公式

$$\omega^2=\omega_{mn}^2=\frac{1}{\rho h}\left\{\left[D_{11}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4+2(D_{12}+D_{33})\left(\frac{n}{a}\right)^2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2+\right.\right.$$

$$\left.+D_{22}\left(\frac{n}{a}\right)^4\right]+$$

$$\left.+\frac{\left(A_{11}A_{22}-A_{12}^2\right)\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4}{a^2\left[A_{11}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4+A_{22}\left(\frac{n}{a}\right)^4+\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2-2A_{12}A_{33}}{A_{33}}\left(\frac{n}{a}\right)^2\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2\right]}\right\} \tag{24}$$

这是一个计算正交各向异性圆柱层壳自振频率的计算公式。这个公式只能用于两端简支的圆柱层壳。如果改变层壳的支承条件，仿此即可得到计算正交各向异性圆柱层壳自振频率的其他形式的公式。

2 算　例

一根两端简支的复合管由两层材料组成，内层材料是玻璃钢，而外层材料是普遍钢材。管壁厚度为8mm，其中玻璃钢层的厚度是 4mm，管外径为426mm，管长为 2m。所有材料的物性参数如表 1 所示。计算复合管的自振频率。

表 1　　材 料 的 物 性 参 数

	弹性模量（MPa）		剪切弹性模量	泊 松 比	密　度
	E_L	E_T	G_{LT}（MPa）	ν_{LT}	ρ（t/m^3）
GRP	9806.65	411.8793	735.4988	0.01	1.6
钢	205939.7		78453.2	0.3	7.8

同时，计算管壁厚度为8mm，管外径为 426mm和长度为2 m，两端简支的钢管和玻璃钢管的自振频率。

计算结果如表 2 和图 1 所示。

表 2　　三种管子的自振频率

n（m＝2）	1	3	5	7
复合管	34669.91	223721.1	603273.3	1172613
钢管	37567.13	243009.6	655389.3	1273965
GRP管	7246.577	25835.93	64536.04	122757.8

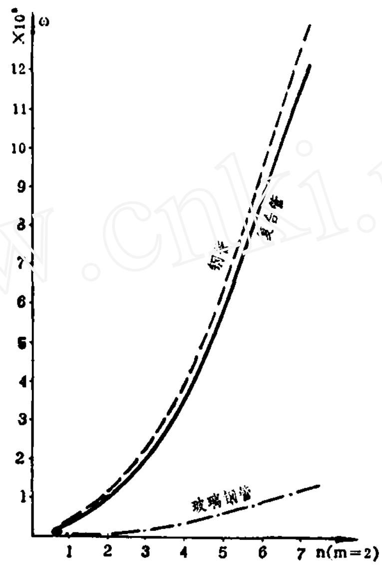

图 1　三种管子的n－ω曲线

3 结　　语

本文分析了正交各向异性圆柱层壳的自振频率，并计算出钢管、玻璃钢管和复合管的自振频率。如上所述，本文概念明确，方法简便。我们从算例中发现对于各种*m*、*n*的组合形式仅靠纵向加强肋或环向加强环均不能提高自振频率。这些结论与文献〔1〕完全一致。

参　考　文　献

〔1〕Werner Soedal. Vibrations of Shells and Plates. Marcel Dekker, Inc, New York and Basel; 1981: 342～360

〔2〕刘锡礼，王秉权.复合材料力学基础.中国建筑工业出版社，1984

〔3〕易先忠，肖芳淳.加权残数法在圆柱壳剪变形理论分析中的应用.第二届全国加权残数法学术会议论文，1986

〔4〕易先忠.圆柱壳剪变形理论的精度分析.西南石油学院学报，1986；8(3)：72～85

FREE VIBRATION ANALYSIS OF ORTHOTROPIC CIRCULAR CYLINDRICAL SHELL OF LAMINATED COMPOSITE

Yao Anlin Xiao Fangchun

(Department of Mechanical Engineering)

Abstract

Based on the dynamic Von Karman-type equations governing the free flexural vibration of the shell, the weighted residual method is adopted in this paper to have otained a new method for the free vibration analysis of the orthotropic circular cylindrical shell of laminated composite. The result obtained is in good agreement with that of Werner Soedal's method. In this paper, the method is applied to the numerical calculations, and its validity is verified by comparing the natural frequencies in three types of pipes.

Key words: Free vibration; Circular cylindrical shell; Orthotropic laminated composite; weighted residual method